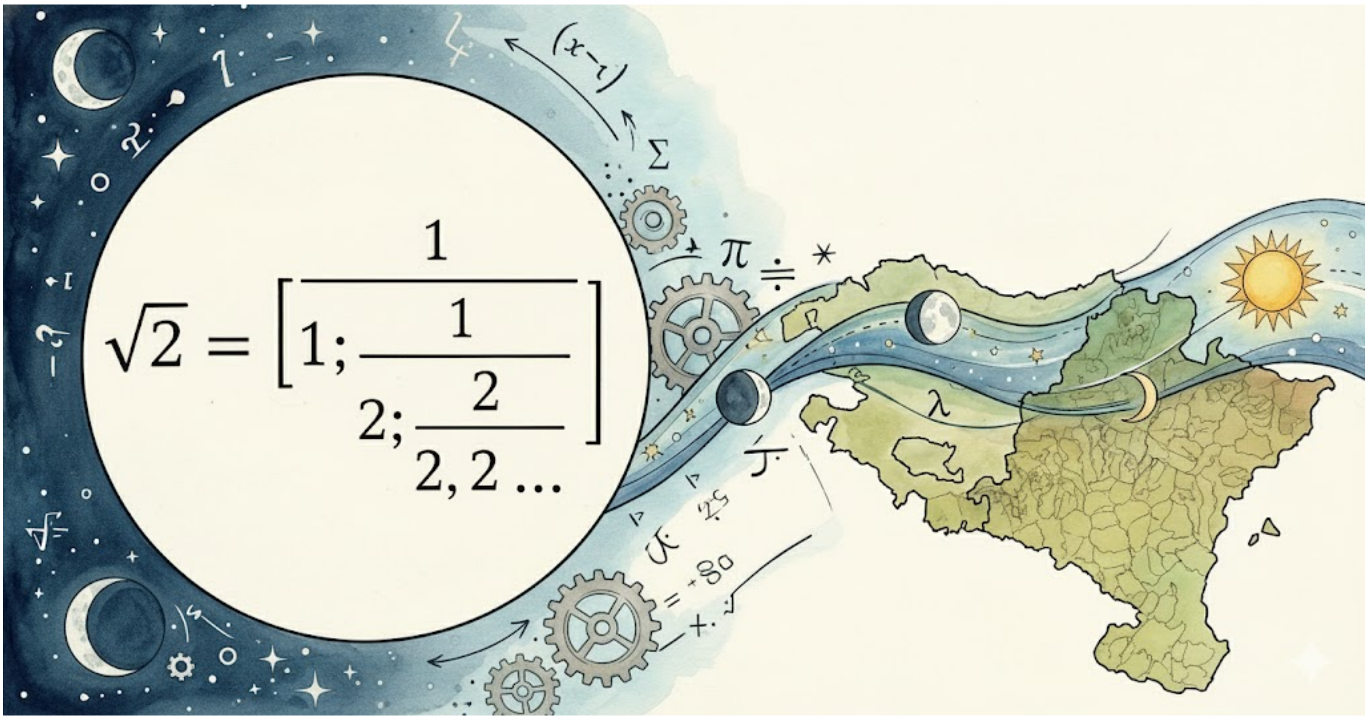
Las ~~modificaciones~~ fracciones continuas del calendario

Alberto Domínguez Navarro

Taller de Talento Matemático de Navarra

Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Pamplona, 24 de abril de 2026



TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO DE NAVARRA
NAFARROAKO MATEMATIKA-TALENTU TAILERRA

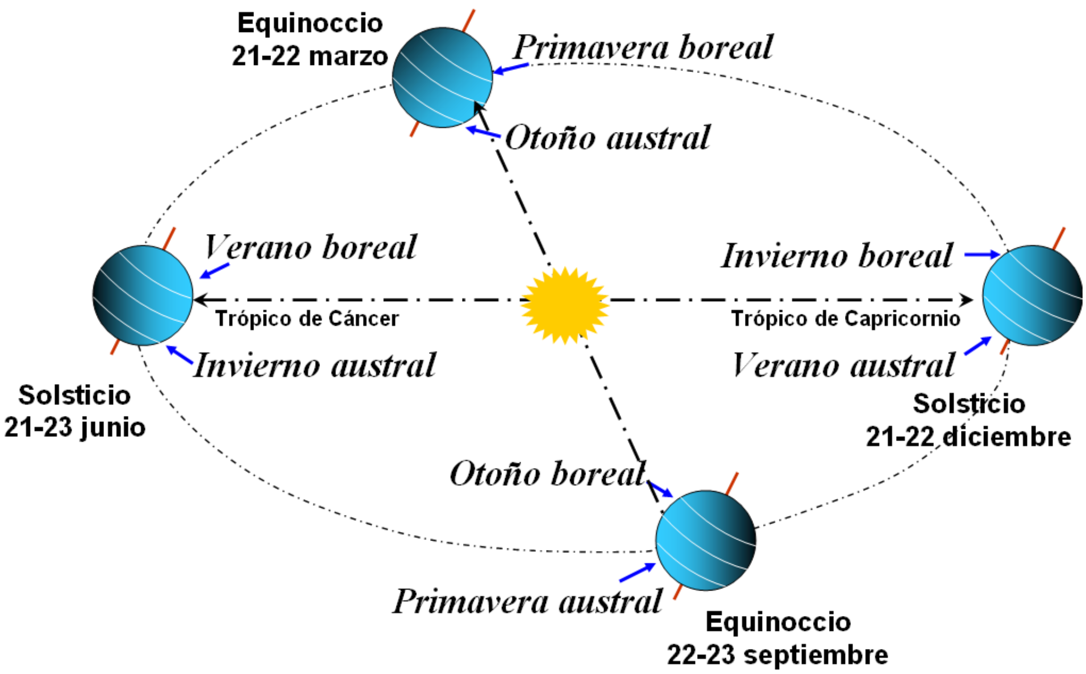
Desde hace siglos los humanos han intentado medir el paso del tiempo, pero se han encontrado con grandes dificultades. El movimiento de la Tierra alrededor del Sol y sobre sí misma causa problemas y desfases entre el calendario y las estaciones.

No existe ninguna ley física que relacione el periodo de rotación de la Tierra con su periodo de traslación. No hay ninguna "fórmula" que relacione la duración del día con la duración del año.

¡Hoy vamos a enfrentarnos a este problema!

La medición del paso del tiempo se ha asociado a tres ciclos astronómicos:

- **El día**, como el tiempo que corresponde a una rotación de la Tierra sobre su eje. El sol aparece en el cielo cada 24 horas.
- **El año**, el tiempo que corresponde a una revolución de la Tierra alrededor del Sol. Es el responsable de las estaciones y del tiempo en cada época del año y se completa cada 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos o cada 365,24219 horas.
- **El mes** como el tiempo que tarda la Luna en girar alrededor de la Tierra, visto desde la Tierra, es el tiempo entre una Luna Nueva y la siguiente.



Calendario de 365 días

Si optamos por un año de 365 días cometemos un error de: **¡1 día cada 4 años!**

Calendarios históricos

El **calendario mesopotámico**, desarrollado por sumerios y babilonios, fue un sistema lunisolar que dividía el año en 12 meses basados en las fases lunares (cada uno de 29 o 30 días), comenzando con la luna nueva, pero requería la adición de un mes intercalar periódicamente para sincronizarlo con el año solar, ajustando así las estaciones, e influyó en la división del día en horas y minutos, según el sistema sexagesimal (base 60) que empleaban.

Los **egipcios**, crearon un calendario que consistía en un año solar de 365 días y formado por doce meses de 30 días cada uno. Al final del año, agregaban cinco días dedicados a varios dioses.

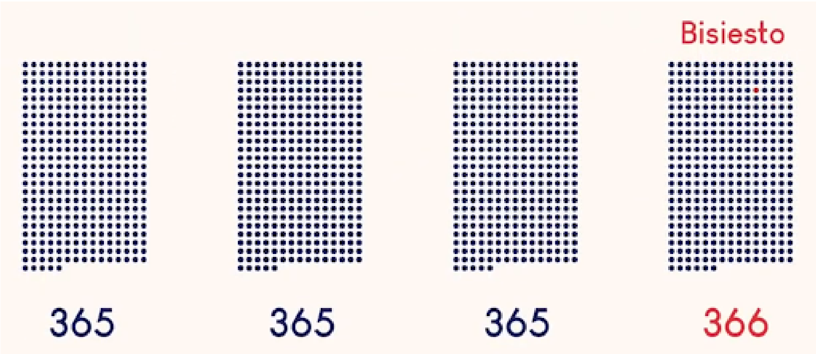
Los **persas** tenían siete grupos de cuatro años de los cuales tres tenían 365 y uno tenía 366. Después de estas siete cuarternas seguía un grupo de cinco años, cuatro de ellos de 365 días y uno de 366. En esta forma, en 33 años, la duración media del año era de 365,24 días y el error era de un día cada 15459 años.

Los primeros **calendarios romanos** tenían 10 meses, desde marzo hasta diciembre, y solo constaban de 304 días. Con el tiempo, los astrónomos romanos mejoraron sus observaciones celestiales y establecieron un calendario de 12 meses y 355 días a partir del siglo VII a.C.

Calendario Juliano

Aconsejado por el astrónomo Sosígenes de Alejandría, Julio César adoptó un año de doce meses de $365\frac{1}{4}$ días en promedio: 3 años seguidos de 365 días y otro de 366 (intercalando un solo día entre el 23 y 24 de febrero).

Al año 46 a.C. (708 desde la fundación de Roma) se le agregó tres meses (el mercedonio de 23 y dos más de 33 y 34 días) completando 445 días, por lo cual ha sido llamado "el año de la confusión".



Duración media del año juliano $365 + \frac{1}{4} = 365{,}25$

¿Qué significa "bisiesto"?

En latín, "calendas" era el primer día del mes. Así el 23 de febrero era el *ante diem sextum kalendas martias*, es decir: sexto día antes del primero de marzo. Los romanos no "ponían" un 29 de febrero los años bisiestos, sino que introducían un día entre el 23 y el 24, al que llamaban *segundo sextum*, es decir, *ante diem bis sextum kalendas martias*, de *bis sextum* viene bisiesto, un segundo día 23.

Actividad 1

Si tomamos como referencia que 1 año solar son 365.24219 días. **¿Cual es el error del calendario juliano?** ¿Cuántos minutos y segundos nos adelantamos al año? ¿Cuántos años tardamos en adelantarnos 1 día?

Calendario gregoriano

El papa Gregorio XIII decidió primero corregir y después mejorar el calendario principalmente por motivos religiosos (fecha de la Pascua), ya que se sabía que la duración del año no era exactamente 365,25 días, sino más bien 365 días 5 horas 49 minutos y 16 segundos (365,24219 días), según las tablas astronómicas elaboradas por la Academia de Toledo en el siglo XIII, por orden expresa de Alfonso X el Sabio (1221-1284), rey de Castilla y de León.

Creó una "comisión del calendario" destacando a los astrónomos Christophorus Clavius y Luigio Lilio. El nuevo calendario, el gregoriano, es el que usamos hoy en día, fue aprobado en 1580, pero no fue hasta dos años más tarde cuando logró ponerse en marcha: en octubre de 1582.

A instancias de Clavio, el Papa Gregorio XIII decretó:

1. **Corregir.** Dado que desde la vigencia del calendario Juliano se habían considerado como bisiestos, años que no debieron serlo y había ya un error acumulado de 10 días, se quitarían 10 días al calendario. El día siguiente al 4 de octubre de 1582 (la Fiesta de San Francisco de Asís) será el 15 de octubre (este año de 1582 es el año más corto de la cristiandad, con 355 días).

2. **Mejorar** Será bisiesto aquel año cuya cifra sea divisible por 4, excepto los años seculares, múltiplos de 100, los cuales serán bisiestos únicamente si son divisibles por 400.

JULIAN 1582		October			Gregorian 1582	
Sun	Mon	Tues	Wed	Thurs	Fri	Sat
	1	2	3	4	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31						

(a) Corregir calendario

(b) Mejorar calendario

Es importante aclarar que estas modificaciones se adoptaron gradualmente por los distintos países:

- Octubre de 1582: Italia, España, Portugal.
- Diciembre de 1582: Flandes. ¡NO hubo Navidad!
- Octubre de 1583: América católica.
- Principios de diciembre de 1583: Francia.
- Enero de 1584: Austria.

Cervantes / Shakespeare y el día del libro

La muerte de Shakespeare, 23 de abril de 1616, coincide con la que se creía era también la de la muerte de Miguel de Cervantes. Sin embargo, en realidad Cervantes, aunque fue sepultado el 23 de abril, había fallecido el día anterior. Tampoco la muerte de Shakespeare y el entierro de Cervantes tuvieron lugar el mismo día.

La fecha de la muerte de Shakespeare se refiere al calendario juliano, vigente por entonces en Inglaterra. La fecha de la muerte de Cervantes se refiere al calendario gregoriano, vigente en los países católicos, como España.

Actividad 2

Si tomamos como referencia que 1 año solar son 365.24219 días. **¿Cual es el error del calendario gregoriano?** ¿Cuántos minutos y segundos nos adelantamos al año? ¿Cuántos años tardamos en adelantarnos 1 día?

¿Y si podemos encontrar un calendario aún mejor?

Tenemos un número con decimales y tenemos que encontrar la "mejor" manera de convertirlo en una fracción.

$$365{,}24219 = 365 + \frac{x \quad dias}{y \quad años}$$

Las fracciones continuas del calendario

El problema del calendario aparece en capítulo XVIII de fracciones continuas en el libro de Leonard Euler *Introducción al análisis de los infinitos*, escrito en latín en 1748.

Definición

Una fracción continua de un número real es una expresión del tipo:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

donde a_0 es un número entero y los demás a_i son enteros positivos.
Esta forma (fracción de múltiples barras) es poco práctica, por eso se pensó en otra notación, menos complicada. La más aceptada es:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Actividad 3

Expresar las siguientes fracciones como fracciones continuas:

1. $\frac{41}{13}$
2. $\frac{25}{37}$
3. $\frac{1}{7}$
4. $\frac{-81}{57}$

Podemos usar el **algoritmo de Eculides** y representar los datos en una tabla, esto nos ayudará a calcular la fracción continua de un número.

$$\textbf{dividendo} = \textbf{divisor} \times \textbf{cociente} + \textbf{resto}$$

Fracción continua de $\dfrac{75}{23} =$

Dividendo	75			
Divisor	23			
Cociente				
Resto				

Actividad 4

1. $[1; 3, 4, 2]$
2. $[-3; 2, 4, 5]$
3. $[0; 3, 5, 8, 6]$

Estas fracciones cumplen ciertas propiedades:

- **Teorema 1:** Todo número real, ya sea entero, racional o irracional, puede escribirse como una fracción continua, aunque en algunos casos será más sencillo que en otros.
- **Teorema 2:** Una fracción continua es finita si y sólo si el número real al que corresponde es un número racional.

Y la más interesante para nosotros:

- **La "mejor" manera de aproximar un número real (racional o irracional) positivo con una fracción es utilizar una fracción continua simple.**

Definición

Sea $x = [a_0; \ldots, a_n]$, entonces:

Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se denominan **cocientes incompletos** de x.

El número $[a_0; \ldots, a_m]$, con $0 \leq m \leq n$ se denomina m**-ésimo convergente** de x.

El último convergente de la fracción continua simple finita es siempre igual al valor del racional representado por esa fracción continua.

Actividad 5

Determina los convergentes de $\dfrac{49}{13}$

¿Habrá alguna manera para evaluar más rápidamente los convergentes de una fracción continua?

Sea C_n el n-ésimo convergente. Sea r_n y s_n el numerador y denominador, respectivamente de C_n. De este modo se tiene que:

$$c_n = \frac{r_n}{s_n} = \frac{a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}}{a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}}$$

teniendo en cuenta que $c_1 = a_1$, $r_1 = a_1$ y $s_1 = 1$, además de definir $r_{-1} = 0$, $s_{-1} = 1$, $r_0 = 1$ y $s_0 = 0$.

Actividad 6

Encuentra los 5 primeros convergentes de la fracción $\frac{384}{157} = [2; 2, 4, 8, 2]$

n							
a_n							
r_n							
s_n							
C_n							

Actividad 7

Halla la fracción continua asociada a $\frac{45}{16}$ e investiga si hay alguna relación entre ella y las siguientes:

1. $[2; 1, 4, 4]$
2. $[2; 1, 4, 5]$
3. $[2; 1, 4, 6]$
4. $[2; 1, 4, 7]$
   $\ldots$
5. $[2; 1, 4, n]$

¿Qué relación hay con $[2; 1, 4] = 14/5$?

Actividad 8

Encuentra la fracción continua asociada a: $\frac{25}{16}, \frac{49}{36}, \frac{81}{64}, \frac{121}{100}$ y trata de encontrar algún tipo de patrón entre ellas.

Aproximaciones de números reales con fracciones continuas

π

¿Cuál es el número irracional más famoso?¿Podemos calcular la fracción continua del número π?

$$\pi = 3{,}141592653589793$$

Fracción continua de π

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$3 + \frac{1}{7}, \qquad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}, \qquad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}, \qquad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

$[3; 7, \dots]$	$[3; 7, 15, \dots]$	$[3; 7, 15, \dots]$	$[3; 7, 15, 1, 292, \dots]$
$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$

$\sqrt{2}$

La $\sqrt{2}$ es un número irracional, lo que significa que tiene una cantidad infinita de decimales que no siguen un patrón repetitivo. Los primeros 20 decimales son:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880$$

Y su representación en fracción continua es

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$$

Actividad 9

Calcula las fracciones continuas de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$.

Si llamamos **número cuadrático irracional** a todo número real que es solución de una ecuación de segundo grado y que no es un número racional (es decir, la raíz cuadrada que aparece en su expresión no es exacta). La fracción continua de este tipo de números posee la curiosa característica de ser periódica.

Actividad 10

Y ahora el ejercicio inverso. Obtener el número irracional cuya fracción continua es la siguiente:

1. $[2;\overline{1,2}]$
2. $[2;\overline{1,2,1}]$
3. $[0;1,\overline{1,2}]$

e

Número $e = 2,718182\dots$ y su fracción continua

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\dots]$$

ϕ

Número de oro ϕ

Actividad 11 sobre ϕ

El rectángulo tiene la propiedad de que al ”quitarle” un cuadrado de lado igual a su lado menor queda un rectángulo semejante al inicial. ¿Cuál es la razón de sus lados?

Actividad 12 sobre ϕ

Calcula algunos convergentes del número de oro $\phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots]$.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n			1	1	1	1	1	1	1	1
r_n	0	1								
s_n	1	0								
C_n										

¿Os suena la serie que forman los numeradores?

Actividad extra 13

Queremos embaldosar una habitación rectangular de 3 m por 7 m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas, no necesariamente iguales. ¿De qué forma se puede hacer usando el mínimo número posible de baldosas?
¿Cómo lo harías si la habitación es de 22 m por 6 m? ¿Encuentras alguna relación con las fracciones continuas?

¿Nuevo calendario?

Nuestra mejor y más fácil aproximación. Tenemos que añadir 1211 días cada 5000 años.

- Si añadimos 1 día cada 4 años, tenemos $5000 \div 4 = 1250$ días.
- Si de los que acaban en 00 queremos que sean bisiestos los múltiplos de 500, es decir, 1 de cada 5. Así tendríamos $1250 - 50 \times (1 - 1/5) = 1210$.
- Si añadimos 1 día más en el año 5000, ese mes de febrero tendría 30 días.

¡Y el error… es de 1 día cada 800.000 años!

Nuevo calendario

* Será bisiesto aquel año cuya cifra sea divisible por 4, excepto los años seculares, múltiplos de 100, los cuales serán bisiestos únicamente si son divisibles por 500.
* Y si es múltiplo de 5000 se añadirá un día extra.

Referencias

- EDWARD PARRA S. (2017). Fracciones continuadas: Un recorrido histórico. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet.
- JODAR REYES, J., RAMÍREZ UCLÉS, R y RODRÍGUEZ, M. L. (2025). Trabajando con las fracciones continuas.SUMA: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 109, 59–70.
- JCERE. (2022, 1 de mayo). Fracciones continuas: por qué son la mejor aproximación que existe. Lemnismath. https://lemnismath.org/2022/05/fracciones-continuas-mejor-aproximacion/